ÜBER DAS SCHWARZSCHE LEMMA UND VERWANDTE SÄTZE

VON

ALEXANDER DINGHAS

ABSTRACT

Upper bounds for the Jacobian determinant by holomorphic mappings of bounded domains D into itself were given first more then thirty years ago by Stefan Bergman by means of his theory of the kernel function of D. In this paper a different method shall be developed and distortion theorems for holomorphic mappings of bounded domains of a Kähler manifold M^n into a Kähler manifold M_0^n shall be proved. The special cases $M^n = C_n$ (unit sphere of $\mathbb{C}^n$) and $M^n = M_0^n = C_n$ shall also be considered. The proof depends essentially on the two Hermitian quadratic forms corresponding to the metric and to the Ricci tensor. The manifolds must be of negative Ricci curvature and fulfil two conditions given in section 4.

1. **Einleitung.** In einem Aufsatz, der in der Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass 1815–1965 veröffentlicht wurde (1), habe ich einen allgemeinen Verzerrungssatz für den Inhalt des durch eine holomorphe Abbildung $w: C_n \to M^n$ der offenen Einheitskugel C_n in eine Kähler-Mannigfaltigkeit M^n erzeugten Überlagerungsstückes bewiesen, der in seiner einfachsten Form $(n = 1, M^1 = C_1)$ ein klassisches Ergebnis von Schwarz und Pick (2) über die Deformation des Inhalts bei in-Abbildungen einer offenen Kreisscheibe der komplexen Ebene als Spezialfall enthält. Sowohl der allgemeine als auch der soeben erwähnte Satz von Schwarz und Pick hängen mit Sätzen zusammen, die S. Bergman als erster vor mehr als dreissig Jahren mit Hilfe seiner Theorie der Kernfunktionen (3) bewiesen hat, und welche erstmalig die Bedeutung der Kählerschen Metrik für eine Reihe von Problemen der komplexen Analysis, insbesondere bei der Abbildung von Gebieten des n-dimensionalen komplexen Raumes $\mathbf{C}^n$ eindrucksvoll demonstrierten. Die Bedeutung der nachfolgenden Entwicklungen liegt weniger an den Ergebnissen (mindestens an einem Teil derselben) als in der verwendeten, mehr differentialgeometrischen Methode. Diese Methode, deren Ursprung in dem einfachen Fall $n = 1$ auf Ahlfors (4) zurückgeht, dürfte

Received February 23, 1967, and in revised form March 26, 1967.

(1) Man vgl. [5].

(2) Man vgl. [5], S. 478 f.

(3) Man vgl. etwa [2], S. 138 ff. Die Original-Abhandlungen von Bergman sind über einen grossen Zeitraum verteilt. Der Leser findet die meisten am Ende von [2] zusammengefasst.

(4) Man vgl. [1] und eventuell auch [5].

insofern noch von Interesse sein, als sie nicht nur den Begriff der Kählerschen Metrik gleich zu Anfang in Anspruch nimmt, sondern auch dafür, dass sie die Bedeutung des Ricci-Tensors für die in Frage kommenden Probleme ins rechte Licht rückt.

Die Nummer 2 enthält Beweise von Hilfssätzen, die ich in meiner eingangs dieser Note zitierten Arbeit mit Rücksicht auf den mir dort zur Verfügung stehenden Raum nur kurz bzw. andeutungsweise entwickeln konnte. In den Nummern 3 und 4 werden drei Verzerrungssätze bewiesen, die sämtlich Abbildungen von Gebieten von $\mathbf{C}^n$ durch Systeme von n holomorphen Funktionen betreffen.

2. **Vorbereitende Tatsachen und Hilfssätze.** Im folgenden soll $\bar{z}_k$ $(k=1,\cdots,n)$ die zu der Zahl z_k konjugierte Zahl bedeuten. Die Veränderlichen z_k und $\bar{z}_k$ $(k=1,\cdots,n)$ definieren einen n-dimensionalen Hermiteschen Raum $\mathbf{H}^n$. Schreibt man $z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$, so ist $\mathbf{H}^n$ dem Raum $\mathbf{R}^{2n}$ äquivalent.

HILFSSATZ 1. *Es sei für i, $k = 1,\cdots,n$*

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

Sind dann $z_1,\cdots,z_n$ und λ beliebige komplexe Zahlen, so gilt die Gleichung

$$|\delta_{ik} + \lambda z_i\bar{z}_k| = 1 + \lambda(z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n) = 1 + \lambda\|z\|^2. \tag{2.1}$$

Dabei bedeutet $|\delta_{ik} + \lambda z_i\bar{z}_k|$ die Determinante der Matrix $(\delta_{ik}+\lambda z_i\bar{z}_k)(i,k=1,\cdots,n)$.

Beweis. Man setze $\Delta(\lambda) = |\delta_{ik} + \lambda z_i\bar{z}_k|$. Dann ist $\Delta''(\lambda) = 0$ und somit Δ eine lineare Funktion von λ. Das liefert leicht die Gleichung

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \begin{vmatrix} 0 & z_1 & \cdots & z_n \\ \bar{z}_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \bar{z}_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda\|z\|^2. \tag{2.2}$$

HILFSSATZ 2. *Man setze für $\|z\| < 1$*

$$V_0 = V_0(z,\bar{z}) = \log(1 - \|z\|^2)^{-1}. \tag{2.3}$$

Dann genügt V_0 der partiellen Differenzialgleichung

$$\left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| = \exp[(n+1)V_0]. \tag{2.4}$$

Dabei bedeutet links die Determinante der Grössen $\dfrac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}$ (5).

Beweis. Es ist

(5) Man vgl. [7] und [5].

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} = \frac{1}{1 - \| z \|^2} \left(\delta_{ik} + \frac{\bar{z}_i z_k}{1 - \| z \|^2}\right).$$

Das liefert die Gleichung

$$\left| (1 - \| z \|^2) \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| = \left| \delta_{ik} + \frac{\bar{z}_i z_k}{1 - \| z \|^2} \right| = \frac{1}{1 - \| z \|^2}$$

Hilfssatz 3. *Die quadratische (Hermitesche) Form* (6)

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k \qquad (\zeta_1, \cdots, \zeta_n \text{ komplex}) \tag{2.5}$$

ist in jedem Punkt $z = (z_1, \cdots, z_n)$ *mit* $\| z \| < 1$ *positiv definit.*

Beweis. Es sei

$$\left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right|_m \qquad (1 \leqq m \leqq n)$$

derjenige Hauptminor der linken Seite von (2.4), der die Veränderlichen $z_1, \cdots, z_m$ $\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_m$ enthält. Wegen

$$\left| \delta_{ik} + \frac{\bar{z}_i z_k}{1 - \| z \|^2} \right|_m = 1 + \frac{\| z \|_m^2}{1 - \| z \|^2}$$

mit $\| z \|_m^2 = z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_m \bar{z}_m$ findet man

$$\left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right|_m = \frac{1 - \| z \|^2 + \| z \|_m^2}{(1 - \| z \|^2)^{m+1}}.$$

Man setze jetzt $w_k = u_k + iv_k, \bar{w}_k = u_k - iv_k$ mit reellen u_k, v_k, und betrachte die Punkte $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ bzw. $(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n)$ von $\mathbf{R}^{2n}$. Es wird sich nun darum handeln, die Transformation des Inhaltselements $[dx_1, \cdots, dy_n]$ durch die Abbildungafunktionen w_k zu bestimmen. Der Beweis des nachfolgenden Satzes verwendet die klassische Theorie der äusseren Multiplikation von Differentialformen von E. Cartan (7):

Hilfssatz 4. *Es sei* $w_1, \cdots, w_n$ *holomorph in der Umgebung des Punktes* $z = (z_1, \cdots, z_n)$ *von* $\mathbf{C}_n$. *Man bilde für* $k = 1, 2, \cdots, n$ *die Differentialformen*

(6) Nach dem Vorbild der Tensorrechnung soll stets über einen zweimal auftretenden (stummen) Index von 1 bis n summiert werden. Eine entsprechende Vorschrift soll für Paare von zweimal auftretenden Indizes gelten. Hierbei wird ein Unterschied zwischen oberen und unteren Indizes nicht gemacht. Eine quadratische Form

$$H_c(\xi, \bar{\xi}) = c_{ik} \xi_i \bar{\xi}_\kappa \qquad (i, k = 1, \cdots, n)$$

heisst Hermitesch, wenn $c_{\kappa i} = \overline{c_{i\kappa}}$ ist. Sie heisst positiv definit, wenn aus $\| \xi \| > 0$ stets $H_c(\xi, \bar{\xi}) > 0$ folgt. Für den Beweis des Hilfssatzes 3 vgl. man noch [7] und [5].

(7) Man vgl. etwa [4] und [6].

(2.6) $$dw_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial z_l} dz_l = a_{kl} dz_l$$

und

(2.7) $$d\bar{w}_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l = \bar{a}_{kl} d\bar{z}_l$$

mit

$$\bar{w}_k = \bar{w}_k(\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n).$$

Dann gilt die Gleichung

(2.8) $$[du_1, \cdots, dv_n] = |a_{ik}| \, |\bar{a}_{ik}| \, [dx_1, \cdots, dy_n].$$

Dabei bedeuten $|a_{ik}|$ *bzw.* $|\bar{a}_{ik}|$ *die (konjugiert komplexen) Determinanten der* a_{ik} *bzw.* $\bar{a}_{ik}$.

Beweis. Nach Definition hat die äussere Multiplikation $\wedge$ der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ eines Vektorraumes V über einen Körper R die Eigenschaften:

1. $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \ \alpha \wedge \alpha = 0$
2. $\alpha \wedge C\beta = C(\alpha \wedge \beta)$ (C-Konstante)
3. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
4. $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = (\alpha \wedge \beta) + (\alpha \wedge \gamma)$.

Das liefert vorerst die Gleichungen

$$\prod_1^n \wedge dw_k = |a_{ik}| \prod_1^n \wedge dz_k$$

und

$$\prod_1^n \wedge d\bar{w}_k = |\bar{a}_{ik}| \prod_1^n \wedge d\bar{z}_k$$

also

$$\prod_1^n \wedge dw_k \wedge \prod_1^n \wedge d\bar{w}_k = |a_{ik}| \cdot |\bar{a}_{ik}| \prod_1^n \wedge dz_k \wedge \prod_1^n \wedge d\bar{z}_k.$$

Andererseits ist wegen

$$dx_i \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_i, \ dy_i \wedge dy_k = -dy_k \wedge dx_i$$

und

$$dx_i \wedge dy_k = -dy_k \wedge dx_i$$

$$\prod_1^n \wedge dz_k \wedge \prod_1^n \wedge d\bar{z}_k = (-2i)^n \prod_1^n \wedge dx_k \wedge \prod_1^n \wedge dy_k$$

und

$$\prod_1^n \wedge dw_k \wedge \prod_1^n \wedge d\bar{w}_k = (-2i)^n \prod_1^n \wedge du_k \wedge \prod_1^n \wedge dv_k.$$

Das beweist die Gleichung (2.8)[8]. In folgenden werden die eckigen Klammern in (2.8) mit den Masselementen ($>0!$) der entsprechenden Räume identifiziert werden.

HILFSSATZ 5. *Es seien*

$$H_a(z,\bar z) = a_{ik}z_i\bar z_k \qquad (a_{ki} = \bar a_{ik})$$
$$H_b(z,\bar z) = b_{ik}z_i\bar z_k \qquad (b_{ki} = \bar b_{ik})$$

zwei (Hermitesche) positiv definite Formen, mit den (positiven) Determinanten $|a_{ik}|, |b_{ik}|$. *Dann folgt aus*

$$H_b(z,\bar z) \leqq H_a(z,\bar z) \qquad (z\in H^n) \tag{2.9}$$

die Ungleichung

$$|b_{ik}| \leqq |a_{ik}|. \tag{2.10}$$

Beweis. Wir gehen von der Tatsache aus[9], dass man jede positiv definite Hermitesche Form

$$H_c(z,\bar z) = c_{ik}z_i\bar z_k \qquad (c_{ki} = \bar c_{ik})$$

durch eine (unitäre) Transformation

$$z_i = p_{ik}\zeta_k \qquad (i,k = 1,\cdots,n) \tag{2.11}$$

und

$$\bar p_{ik}p_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (k=l) \\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

in die (Normal-) Form

$$H_0(\zeta,\bar\zeta) = \lambda_k|\zeta_k|^2 = \lambda_k\zeta_k\bar\zeta_k \qquad (\lambda>0;\ k=1,\cdots,n)$$

bringen kann. Man betrachte das Integral

$$Q_c = \int \exp\{-H_c(z,\bar z)\}\,[dx_1\cdots dy_n]$$

erstreckt über den gesamten Raum H^n, und beachte, dass allgemein

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\lambda x^2\}\,dx = \frac{\pi^{1/2}}{\lambda^{1/2}} \qquad (\lambda>0)$$

gilt. Das liefert unter Heranziehung des Hilfssatzes 4 und der Tatsache, dass

(8) Für $n = 2$ findet sich diese Gleichung in einer Arbeit von P. J. Myrberg. Man vgl. [8].

(9) Man vgl. etwa [9]. In diesem Buch (S. 169 ff) findet man eine vollständige Theorie der Hermiteschen Formen, sowie eine Darstellung des (klassischen) Beweises des Hilfssatzes 5 mit Hilfe einer gleichzeitigen Überführung von $H_a(z,\bar z)$ und $H_b(z,\bar z)$ in die Normalform.

$$Q_c^0 = \pi^n / \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

ist, die Gleichung

$$Q_c = \frac{\pi^n |p_{ik}| |\bar{p}_{ik}|}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = \frac{\pi^n}{|c_{ik}|}.$$

Gilt nun (2.9), so ist $Q_a \leqq Q_b$ und mithin gilt die Ungleichung

$$\frac{\pi^n}{|a_{ik}|} \leqq \frac{\pi^n}{|b_{ik}|}.$$

Das liefert die Ungleichung (2.10).

Der Hilfssatz 5 gilt offenbar auch dann, wenn die (Hermitesche) Form $H_b(z,\bar{z})$ positiv semi-definit (d.h. $\geqq 0$) ist. Es genügt in der Tat die (positiv) definite Form $H_{a'}(z,\bar{z})$, $H_{b'}(z,\bar{z})$ mit

$$a'_{ik} = a_{ik} + 2\delta_{ik}\varepsilon, \quad b'_{ik} = b_{ik} + \delta_{ik}\varepsilon$$

zu betrachten und in der Ungleichung $|b'_{ik}| \leqq |a'_{ik}|$, ε gegen Null konvergieren zu lassen.

Von der Ungleichung (2.10) wird in den nächsten Nummern Gebrauch gemacht.

3. **Beweis eines Satzes von S. Bergman.** Man setze

(3.1) $$V_0 = V_0(z,\bar{z}) = \log \frac{1}{1 - \|w\|^2}$$

und

$$J = \left| \frac{\partial w_i}{\partial z_k} \right| \qquad \text{(Jacobische Funktionaldeterminante).}$$

Dann wird wegen

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu} \frac{\partial w_\mu}{\partial z_i} \frac{\partial \bar{w}_\nu}{\partial \bar{z}_k}$$

$$\left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| = \left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial w_i \partial \bar{w}_k} \right| |J|^2$$

$$\left| \frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| = \frac{|J|^2}{(1 - \|w\|^2)^{n+1}} = |J|^2 \exp[(n+1)V_0]$$

ür jeden Punkt $(z,\bar{z})$ von C_n. Da noch

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \log |J|^2 = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \log(J\bar{J}) = 0$$

gilt, so genügt die Funktion

$$V_1 = \log \frac{|J|^2}{(1-\|w\|^2)^{n+1}}$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\left| \frac{\partial^2 V_1}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| = (n+1)^n \exp V_1 = A_n \exp V_1. \tag{3.2}$$

Es bezeichne jetzt r eine positive Zahl zwischen 0 and 1. Man setze für $\|z\| < r$ (kurz $z \in C_r$)

$$U_r = \log \frac{r^2}{(r^2 - \|z\|^2)^{n+1}}$$

und beachte, dass U_r der partiellen Differentialgleichung

$$\left| \frac{\partial^2 U_r}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| = (n+1)^n \exp U_r \tag{3.3}$$

genügt. Es wird sich jetzt darum handeln zu zeigen, dass

$$V_1 \leqq U_r \tag{3.4}$$

in C_r und somit auch $V_1 \leqq U_1$ in C_n gilt.

Man setze $\psi = V_1 - U_r$ und nehme an, die Menge

$$E_r = \{z\colon\ z \in C_r,\ \psi > 0\}$$

sei nicht leer. Dann liegt (wegen $U_r = +\infty$ auf $\|z\| = r$) die abgeschlossene Hülle $\bar{E}_r$ von E_r ebenfalls in C_r und somit besitzt ψ ein Maximum in einem Punkt von E_r, etwa im Punkt $(z_0, \bar{z}_0)$. Nun gilt der Satz:

HILFSSATZ 6. *Hat ψ ein Maximum in $z \in E_r$, so gilt dort die Ungleichung*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k \leqq 0. \tag{3.5}$$

Dabei sind die ζ_i willkürliche komplexe Zahlen.

Beweis. Man schreibe $\xi_k + i\eta_k$ (mit reellen ξ_k, η_k) für ζ_k und beachte, dass

$$\xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \eta_k \frac{\partial}{\partial y_k} = \zeta_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\zeta}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \qquad \text{(keine Summation)}$$

also

$$D_\zeta = \sum_{k=1}^{n} \left(\zeta_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{\zeta}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right).$$

Erreicht nun ψ in z_0 sein Supremum, so muss dort bei beliebiger Wahl der ζ_k die Ungleichung

$$D_\zeta^2 \psi \leqq 0$$

gelten. Daraus folgt wegen

$$D_\zeta^2 \psi + D_{i\zeta}^2 \psi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k \leqq 0$$

die Behauptung (3.5).

Nachfolgender Hilfssatz gestattet die Anwendung des Hilfssatzes 5:

HILFSSATZ 7. *Man setze*

$$V_0 = \log \frac{1}{1 - \| w \|^2} \qquad (z \in E_r).$$

Dann ist die (Hermitesche) quadratische Form

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k$$

positiv definit.

Beweis. Da in E_r die Ungleichung $|J| > 0$ gilt, hat das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_\mu = \frac{\partial w_\mu}{\partial z_k} \zeta_k$$

nichttriviale Lösungen in E_r. Nun ist

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu} \frac{\partial w_\mu}{\partial z_i} \frac{\partial \bar{w}_\nu}{\partial \bar{z}_k}$$

und somit

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k = \frac{\partial^2 V_0}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu} \alpha_\mu \bar{\alpha}_\nu .$$

Das beweist (mit Rücksicht auf den Hilfssatz 3) die Behauptung.

Nach diesen Vorbereitungen kann die Ungleichung (3.4) folgendermassen bewiesen werden:

Aus (3.5) folgt (in z_0)

$$0 \leqq \frac{\partial^2 V_1}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k \leqq \frac{\partial^2 U_r}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \zeta_i \bar{\zeta}_k$$

und somit nach dem Hilfssatz 5 d.h. der Ungleichung (2.10)

$$\left| \frac{\partial^2 V_1}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| \leqq \left| \frac{\partial^2 U_r}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right| .$$

Das liefert wegen (3.2) und (3.3) die Ungleichung

$$\exp V_1 \leqq \exp U_r,$$

d.h. $V_1 \leqq U_r$ in $(z_0, \bar{z}_0)$, was gegen die Voraussetzung ist. Somit gilt $V_1 \leqq U_r$ in C_r, also auch $V_1 \leqq U_1$ in C_n (10).

Somit ist folgender Satz bewiesen worden:

SATZ 1. *Es bezeichne $w: C_n \to C_n$ eine holomorphe Abbildung der Einheitskugel*

$$C_n = \{z: \|z\| < 1\} \tag{3.6}$$

mit $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $\|z\|^2 = z_\alpha \bar{z}_\alpha$ (11), *durch die* (in C_n holomorphen) *Funktionen*

$$w_k = w_k(z_1, \cdots, z_n). \tag{3.7}$$

Dann gilt in jedem Punkt von C_n die Ungleichung

$$|J| \leqq \left(\frac{1 - \|w\|^2}{1 - \|z\|^2}\right)^{(n+1)/2}. \tag{3.8}$$

Dabei bedeutet links den Betrag der Jacobischen Funktionaldeterminante der w_i nach den Veränderlichen z_k.

Die Ungleichung (3.8) und somit der Satz 1 wurde unter Heranziehung der Theorie der Kernfunktionen erstmalig von S. Bergman im Jahre 1936 bewiesen (12).

Aus dem Satz 1 kann man unter Heranziehung klassischer Hilfsmittel der Mass- und Integrationstheorie ohne Schwierigkeit folgenden Satz beweisen:

SATZ 1a. *Es bezeichne A eine messbare Teilmenge von C_n und $w(A)$ die durch die Abbildung*

$$w: C_n \to C_n \tag{3.9}$$

erzeugte Überlagerungsmenge. Dann gilt die Ungleichung

$$\int_{w(A)} \frac{[du_1 \cdots dv_n]}{(1 - \|w\|^2)^{n+1}} \leqq \int_A \frac{[dx_1 \cdots dy_n]}{(1 - \|z\|^2)^{n+1}}. \tag{3.10}$$

Der Beweis der Ungleichung (3.10) sützt sich auf folgende Eigenschaften der Abbildung $w: C_n \to C_n$ (die hier als nicht konstant vorausgesetzt wird):

---

(10) Der Gedanke, das Schwarzsche Lemma ($n = 1$) mit Hilfe der Poincaré-Picardschen Differentialgleichung $\Delta u = 4 \exp(2u)$ zu beweisen (und zu verallgemeinern) geht auf Ahlfors [1] zurück. Die Bergmansche Theorie der Kernfunktionen würde zunächst zu demselben Resultat führen.

(11) Man vgl. Fussn. 6).

(12) Den Hinweis, dass der Satz 1 sich direkt aus der Theorie der Bergmanschen Kernfunktionen, durch Betrachtung der Kernfunktion von C_n und Anwendung der Ungleichung (5.7) von [3], ableiten lässt, verdanke ich einer Mitteilung von Herrn M. Schiffer.

1. Die Teilmenge von C_n, auf der J verschwindet, hat das (n-dimensionale) Mass Null.

2. Auf der übrigen Teilmenge von $w(A)$ ist die Abbildung $A \to w(A)$ lokal ein-eindeutig und lokal dehnungsbeschränkt ([13]).

3. Es sei K eine messbare Teilmenge von A, auf der die Abbildung $w: A \to w(A)$ ein-eindeutig und dehnungsbeschränkt ist. Dann gilt die Gleichung

$$\int_{w(K)} \frac{[du_1 \cdots dv_n]}{(1- \quad w\|^2)^{n+1}} = \int_K \frac{|J|^2}{(1-\|w\|^2)^{\overline{n+1}}}[dx_1 \cdots dy_n]. \tag{3.11}$$

Der Leser findet in [6] die der Gleichung (3.11) zugrundeliegende allgemeine Transformation eines Lebesgueschen Integrals hinreichend begründet.

4. *Allgemeine Verzerrungssätze.* Mit Rücksicht darauf, dass der Satz 1 Spezialfall eines allgemeineren Satzes von S. Bergman ist([14]), stellt sich die Frage, inwieweit das in 3 entwickelte Verfahren verallgemeinert werden kann. Dass dies tatsächlich der Fall ist, soll hier kurz gezeigt werden.

Es bezeichne M^n einen Kählersche Mannigfaltigkeit([15]) mit der quadratischen Grundform

$$ds^2 = 2g_{\alpha\beta}dz_\alpha d\bar{z}_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n) \tag{4.1}$$

und

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_\alpha \, \partial \bar{z}_\beta}, \tag{4.2}$$

wobei Φ eine reelle (viermal stetig differenzierbare) Funktion von z and $\bar{z}$ ist. Dabei wird z als lokaler Parameter mit den üblichen Transformationsregeln bei dessen Änderung aufgefasst. Schreibt man $\bar{\beta}$ für β und deutet man $\bar{z}_\beta$ durch $\bar{z}_\beta \to z_{\bar{\beta}}$, so gelten die Beziehungen

$$\overline{z_{\bar{\beta}}} \to z_\beta, \; g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\bar{\beta}\alpha}, \; g_{\bar{\alpha}\beta} = \overline{g_{\alpha\bar{\beta}}} \; ([16]).$$

Wichtig für die nachfolgenden Entwicklungen ist der Begriff des Ricci-Tensors ($R_{\alpha\bar{\beta}}$), der durch die Metrik (4.1) gegebenen Kählerschen Mannigfaltigkeit. Es bezeichne $|g_{\alpha\bar{\beta}}|$ die (positive) Determinante der $g_{\alpha\bar{\beta}}$. Dann gilt die Gleichung

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \log |g_{\alpha\bar{\beta}}| \; ([17]). \tag{4.3}$$

([13]) Man vgl. etwa [6], S. 285 ff.

([14]) Man vgl. etwa [2], S. 139 ff, und [3] S. 95.

([15]) Die Definition der analytischen Mannigfaltigkeit von der komplexen Dimension n sowie der Kählerschen Mannigfaltigkeit findet der Leser in [10].

([16]) Man vgl. [10], S. 120 ff.

([17]) Man vgl. [10], S. 126.

Mit Hilfe des Ricci-Tensors $(R_{\alpha\bar\beta})$ wird die Ricci-Krümmung in jedem Punkt von M^n durch den Ausdruck

$$M = \frac{R_{\alpha\bar\beta}dz_\alpha d\bar z_\beta}{g_{\alpha\bar\beta}dz_\alpha d\bar z_\beta} \tag{4.4}$$

definiert([18]). Für den Fall $M^n = C_n$ und die Wahl

$$g_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} \log \frac{1}{1 - \| z \|^2} \tag{4.5}$$

(Poincaré-Kähler Metrik von C_n) gilt offenbar die Gleichung

$$| - R_{\alpha\bar\beta}| = \left| \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} \log \frac{1}{(1 - \| z \|^2)^{n+1}} \right| = |(n+1)g_{\alpha\bar\beta}|. \tag{4.6}$$

In diesem Falle hat bekanntlich die Ricci-Krümmung von C_n einen vom Punkt unabhängigen konstanten Wert (Einstein-Mannigfaltigkeit).
Man nehme jetzt an, es existiere auf M^n eine Metrik

$$ds^2 = 2\hat g_{\alpha\bar\beta} dz_\alpha dz_{\bar\beta} \tag{4.7}$$

mit den Eigenschaften:

1. Es ist

$$\hat R_{\alpha\bar\beta} = - \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} \log | \hat g_{\alpha\bar\beta} | = -(n+1)\hat g_{\alpha\bar\beta}. \tag{4.8}$$

2. Es ist

$$\lim |\hat g_{\alpha\bar\beta}| = +\infty, \tag{4.9}$$

wenn der in Frage kommende Punkt von M^n gegen den Rand Γ von M^n konvergiert.

Dann kann zunächst folgender Verzerrungssatz bewiesen werden:

SATZ 2. *Es bezeichne M_0^n eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit der Metrik*

$$ds^2 = 2g_{\alpha\bar\beta}dw_\alpha dw_{\bar\beta}. \tag{4.10}$$

Man nehme an, (4.10) *habe in jedem Punkt die Eigenschaften*

1. $$-R_{\alpha\bar\beta}dw_\alpha dw_{\bar\beta} > 0.$$

2. $$|-R_{\alpha\bar\beta}| \geqq A_n |g_{\alpha\bar\beta}| \qquad (A_n = (n+1)^n).$$

Dann gilt für die holomorphe Abbildung $w: M^n \to M_0^n$ die Ungleichung

$$|g_{\alpha\bar\beta}| \, |J|^2 \leqq |\hat g_{\alpha\bar\beta}|, \tag{4.11}$$

([18]) Man vgl. [10], S. 23.

sofern diese als Grenzwert von holomorphen Abbildungen $f_k: M^n \to M_0^n$ $(k = 1, 2, \cdots)$ *aufgefasst werden kann, mit der Eigenschaft, dass die abgeschlossene Hülle der durch die* f_k *vermittelten Abbildungsmengen* $f_k(M^n)$ *sämtlich in* M_0^n *liegen.*

Beweis. Man ersetze die w_k und $\bar{w}_k$ in den $g_{\alpha\beta}$ durch $w_k(z_1, \cdots, z_n)$ bzw. $\bar{w}_k(\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$ *und* bilde die Funktion

$$U = \log |g_{\alpha\beta}| + \log |J|^2$$

zunächst unter der Annahme, dass die Abbildungsmenge $w(M^n)$ die Eigenschaft

$$\overline{w(M^n)} \subset M_0^n \tag{4.12}$$

besitzt. Dann gilt zunächst (mit Rücksicht auf die Entwicklungen von 3 und die Voraussetzung 2)

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right| \geqq A_n \exp U \qquad (J \neq 0). \tag{4.13}$$

Andererseits genügt die Funktion $V = \log |\hat{g}_{\alpha\beta}|$ der Differentialgleichung

$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right| = A_n \exp V \tag{4.14}$$

und dies liefert den Zugang zu dem Beweisgang von 3. Denn die Voraussetzung (4.12) sichert, dass das Supremum von $\psi = U - V$ in einem Punkt z_0 von M^n angenommen wird. Andererseits kann in diesem Punkt (wegen $|J| > 0$, der Bedingung 2 und dem Hilfssatz 6) unmöglich $U - V > 0$ gelten. Das beweist die Behauptung für jede Abbildung w mit der Eigenschaft (4.12). Der allgemeine Fall erledigt sich durch Verwendung der Abbildungsfolge (f_k) und Grenzübergang $k \to +\infty$.

Ist M^n konvex, so führt die Betrachtung von konvexen (abgeschlossenen) Ausschöpfungsmannigfaltigkeiten, ähnlich wie beim Fall der Kugeln C_r zu einem direkten Beweis von (4.11). Wir gehen darauf nicht näher ein.

Ist $M^n = C_n$, so liefert der Satz 2 unter Zugrundelegung der Poincaré-Kähler Metrik

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \log \frac{1}{1 - \|z\|^2}$$

den Satz:

Satz 3. *Für jede Kählersche Metrik* (4.10) *von* M_0^n *mit den Eigenschaften* 1 *und* 2 *und jede holomorphe Abbildung* $w: C_n \to M_0^n$ *gilt die Ungleichung*

$$|g_{\alpha\beta}|\ |J|^2 \leqq (1 - \|z\|^2)^{-(n+1)}. \tag{4.15}$$

Dass sowohl aus (4.11) wie auch aus (4.15) ähnliche Sätze wie der Satz 1a folgen, ist wohl trivial und bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

Es dürfte wohl von Interesse sein, festzustellen, inwieweit die von S. Bergman mit Hilfe der Theorie der Kernfunktionen begründeten Sätze sich mit den hier durch differentialgeometrische Methoden bewiesenen Sätzen decken. Das ist eine Frage, auf die zunächst umso weniger eine Antwort gegeben werden kann, als mir bisher die Bergmannsche Theorie nur in allgemeinen Zügen bekannt war. Herrn Prof. M. Schiffer habe ich hier dafür zu danken, dass er mich auf die betreffende Stelle im Bergmanschen Buch aufmerksam gemacht hat.

LITERATUR

1. L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma.* Trans. Amer. Math. Soc. (1938), 359–364.

2. S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping,* Publ. by the Amer. Math. Soc., New York, 1950.

3. ———, *Zur Theorie der pseudokonformen Abbildungen.* Rec. math. Moscou, (2), **1**, (43), 1936, S. 79–96.

4. E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux.* Hermann, Paris, 1922.

5. A. Dinghas, *Ein n-dimensionales Analogon des Schwarz-Pickschen Satzes für holomorphe Abbildungen der komplexen Einheitskugel in eine Kähler-Mannigfaltigkeit.* Festschrift zur Gedächtnisfeier für Weierstrass 1815–1965. Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen 33. Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen, 1966, S. 477–494.

6. Haupt-Aumann-Pauc. *Differential-und Integralrechnung.* III. Band, S. 279 ff. Walter de Gruyter, Berlin, 1955.

7. E. Kähler, *Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik.* Abh. Mathem. Sem. d. Univ. Hamburg **9** (1933), 173–186.

8. P. J. Myrberg, *Ein Analogon des Flächensatzes bei Funktionen mehrerer Variablen.* Annal. Acad. Scient. Fennicae A.I. (1961), 303.

9. B. L. van d. Waerden, *Algebra,* Zweiter Teil. 4te Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

10. K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers,* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1953.

I. MATHEMATISCHES INSTITUT,
FREIE UNIVERSITÄT BERLIN,
BERLIN, GERMANY